UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS V (MA-2112)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

25 de noviembre de 2016

Integrales Dobles, Cambio de Orden de Integración, Cambio de Variables, Volumen de una Región, Teorema de Green

Resolución Segundo Parcial, Intensivo 2015

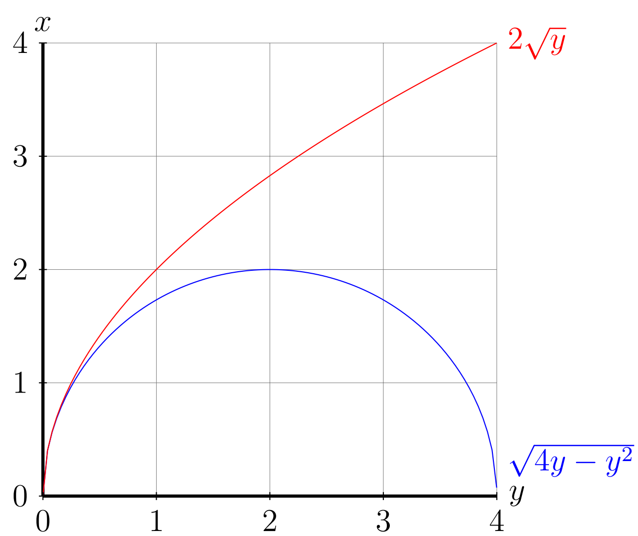
1. Considere la siguiente integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{4y-y^2}}^{2\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

   a) Dibuje la región de integración

   b) Intercambie el orden de integración

   Dibujemos la región:



   Gráficamente puede verse que, invirtiendo el orden de integración, se obtiene

$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{4}x^2}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_0^2 \int_{2+\sqrt{4-x^2}}^{4} f(x,y)dydx + \int_2^4 \int_{\frac{1}{4}x^2}^{4} f(x,y)dydx$$

2. Calcule

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

siendo D

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4;\ 2 \leq xy \leq 6;\ x > 0;\ y > 0\}$$

usando el cambio de variables

$$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$$

Según el cambio de variables, se obtiene la región correspondiente

$$\Omega = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 4;\ 4 \leq v \leq 12\}$$

Ahora, véase que

$$u^2 + v^2 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^2 = (x^2+y^2)^2$$

Y luego

$$\sqrt{u^2+v^2} = x^2 + y^2$$

Por ende, se obtiene la integral

$$\int_4^{12}\int_1^4 \sqrt{u^2+v^2}|J(u,v)|dudv$$

Donde si

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2+v^2} = x^2+y^2 \implies x^2 &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}\\ y^2 &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}x = X(u,v) &= \sqrt{\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}\\ y = Y(u,v) &= \sqrt{-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}\end{aligned}$$

Luego

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

Donde

$$X_u = \frac{1}{4}\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}} \qquad X_v = \frac{1}{4}\frac{\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}}$$

$$Y_u = \frac{1}{4}\frac{-1+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}} \qquad Y_v = \frac{1}{4}\frac{\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}}$$

Operando

$$J(u,v) = X_uY_v - X_vY_u$$

$$\frac{1}{16}\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}}}\left[\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{uv}{u^2+v^2}\right)-\left(\frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{uv}{u^2+v^2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{8v}\frac{2v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}$$

Finalmente, la integral resulta

$$\int_4^{12}\int_1^4 \sqrt{u^2+v^2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}dudv = \frac{1}{4}\int_4^{12}\int_1^4 dudv = \frac{24}{4} = 6$$

Nótese que al expresar x y y como funciones de u y v se tomaron las ramas positivas debido a que D requiere $x, y > 0$.

3. Calcule el volúmen del sólido Ω limitado superiormente por $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$ e inferiormente por $z = x^2 + y^2$

Primero, tomemos la transformación a coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad z = k$$

Las curvas que limitan al sólido resultan

$$r^2 + (k-4)^2 = 16$$
$$k = r^2$$

Operando la primera ecuación se hallan las dos ramas que describen la esfera

$$k_1 = 4+\sqrt{16-r^2} \qquad \text{y} \qquad k_2 = 4-\sqrt{16-r^2}$$

Puesto que la esfera limita superiormente a la región, tomaremos k_1, dado que k_2 está por debajo de r^2 para el dominio en r de la esfera.

Hallando los puntos de intersección en r

$$r^2 = 4+\sqrt{16-r^2} \implies r^2-4 = \sqrt{16-r^2}$$
$$r^4 - 8r^2 + 16 = 16 - r^2$$
$$r^2(r^2-7) = 0 \implies r_i = \sqrt{7}$$

Por ende, las dos curvas se intersectan en $r_i = \sqrt{7}$; esto define la región de integración respecto a r. La integral del volumen resulta entonces

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}}\int_{r^2}^{4+\sqrt{16-r^2}} rdkdrd\theta$$

Operando

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}}\int_{r^2}^{4+\sqrt{16-r^2}} rdkdrd\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}} \left(4r + r\sqrt{16-r^2} - r^3\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}} d\theta \\ &= 2\pi\left(14 - \frac{49}{4} + \frac{37}{3}\right) = \frac{169\pi}{6}\end{aligned}$$

4. Sea C la curva cerrada definida por $y^2 = 2(x+2)$ y por $x = 2$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Primero, definamos las curvas sobre el plano xy como

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 2$$
$$x = 2$$

Fácilmente puede observarse que éstas curvas se intersectan en $y = \pm 2\sqrt{2}$. La región engendrada por las curvas resulta

$$\Psi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2};\ \frac{1}{2}y^2 - 2 \leq x \leq 2\right\}$$

Aplicando el Teorema de Green obtenemos

$$\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \iint_\Psi (Q_x - P_y)\, dxdy$$

donde

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad P = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Sustituyendo y operando

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}y^2-2}^{2} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy = 0$$

Finalmente, mediante el Teorema de Green

$$\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial del período intensivo 2015, y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com